

© Бызов В.А., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-5-25

УДК 519.115.1

Перечислительные задачи, связанные с преобразованием Донахью

Виктор Александрович БЫЗОВ

ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

610000, Российская Федерация, г. Киров, ул. Московская, 36

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3613-5949>, e-mail: vbyzov@yandex.ru

Enumeration problems associated with Donaghey's transformation

Viktor A. BYZOV

Vyatka State University

36 Moskovskaya St., Kirov 610000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3613-5949>, e-mail: vbyzov@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена рассмотрению перечислительных задач, связанных с преобразованием Донахью. Обсуждаются две группы вопросов. Первая группа связана с перечислением фрагментов орбит преобразования, называемых «дугами». Вторая часть работы посвящена нахождению количества вершин в графах поворотов — специфическом семействе графов, представляющем собой «аппроксимацию» преобразования Донахью. Основные результаты данной работы сформулированы в виде производящих функций и соответствующих асимптотик.

Ключевые слова: плоские деревья; примитивные деревья; преобразование Донахью; производящие функции; дуги преобразования; графы поворотов

Для цитирования: Бызов В. А. Перечислительные задачи, связанные с преобразованием Донахью // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 5–25. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-5-25

Abstract. In this paper we consider enumeration problems associated with Donaghey's transformation. We discuss two groups of questions. The first one is related to the enumeration of fragments of transformation orbits, which are referred to as the "arcs". The second group of questions is concerned with finding the number of vertices in rotation graphs — a specific family of graphs that is by nature an approximation of Donaghey's transformation. The basic results of this work are formulated in the form of generating functions and corresponding asymptotics.

Keywords: plane trees; primitive trees; Donaghey's transformation; generating functions; arcs of transformation; graphs of rotations

For citation: Byzov V. A. Perechislitel'nyye zadachi, svyazannyye s preobrazovaniyem Donakh'yū [Enumeration problems associated with Donaghey's transformation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 5–25. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-5-25 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Напомним, что преобразование Донахью (см., например, [1]) называется преобразование плоских кубических деревьев с висячим корнем (для краткости будем использовать аббревиатуру ПКДВК).

Между ПКДВК и плоскими некубическими деревьями с висячим корнем (далее – ПДВК) существуют два варианта биекции: правая биекция и левая биекция. При правой биекции r правые цепи в ПКДВК переходят в вершины ПДВК; при левой биекции l левые цепи ПКДВК переходят в вершины ПДВК. Рис. 1 иллюстрирует эти биекции. В верхней части рисунка к дереву T применяется правая биекция, в нижней части рисунка к $r(T)$ применяется биекция обратная к левой. Правые и левые цепи на этом рисунке выделены пунктиром. Цепи, содержащие сына корня, будем называть старшей правой и старшей левой цепями.

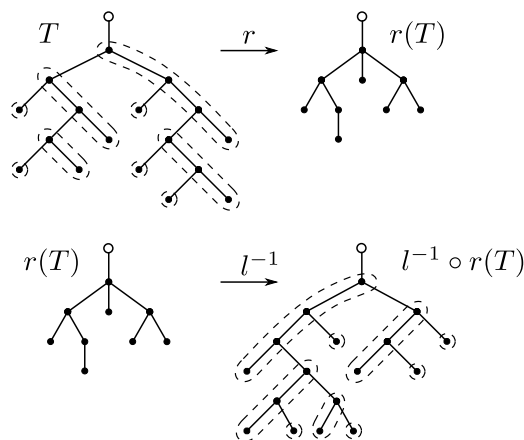


Рис. 1: Биекции r и l между множествами ПКДВК и ПДВК

О п р е д е л е н и е 0.1. Преобразованием Донахью ПКДВК T называется дерево $\tau(T) = l^{-1} \circ r(T)$.

Таким образом, на рис. 1 построен образ дерева T при преобразовании Донахью.

Каждое ПКДВК можно разбить на фрагменты, которые назовём *триадами*. Под триадой будем понимать вершину, не являющуюся листом и корнем, с тремя половинками смежных с ней рёбер. Листья с единственными смежными половинками рёбер поглощаются. Для каждой триады естественно определены не более чем по одной другой триаде, играющих для неё роль отца, правого и левого сыновей. Триаду, содержащую сына корня, будем называть *корневой триадой*.

На деревья, представленные в виде наборов триад, также можно действовать преобразованием Донахью. В качестве примера выполним преобразование Донахью для дерева T с рис. 1, разбитого на триады. Результат этой операции изображён на рис. 2.

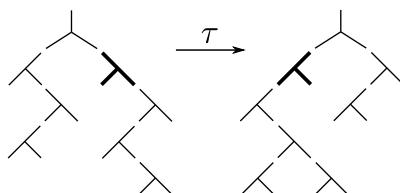


Рис. 2: Преобразование Донахью дерева, разбитого на триады

Технически преобразование Донахью является просто перестановкой деревьев, которая может быть легко (правда, строго говоря, не однозначно) перенесена на любую другую комбинаторную интерпретацию чисел Каталана, точнее – семейством перестановок деревьев каждого определённого размера.

Однако циклическая структура перестановок этого семейства настолько сложна, что позволяет говорить об обратимой комбинаторной динамической системе, представляющей самостоятельный интерес и заслуживающей отдельного изучения.

При изучении преобразования Донахью естественно возникает большое количество перечислительных задач. Фактически многие основные проблемы, связанные с ним, изначально имеют форму перечислительной задачи. Таковыми, например, являются задачи об общем количестве циклов (орбит) этих перестановок, о количестве циклов с заданными длинами (наиболее интересными представляются задачи о перечислении циклов с длинами 2, 6 и 9). Примечательно, что эти просто формулируемые проблемы привлекали внимание многочисленных специалистов (см., например, [2]–[4], [5, с. 472]), однако обычной реакцией на возникающие при этом трудности являлось то, что автор отмечал какое-нибудь несложное свойство и переходил к некоторой смежной задаче.

Проблемы, рассмотрению которых посвящена данная работа, формулируются не настолько просто и возникают, когда при изучении преобразования Донахью замечается какой-либо эффект, вызывающий интерес, что неизбежно приводит к вопросу о том, является ли этот эффект массовым или экзотическим. Как правило, аккуратный анализ структуры соответствующих деревьев позволяет явно вычислить соответствующую производящую функцию. При вычислении асимптотического характера роста коэффициентов (той самой массовости) систематически используется результат, иногда именуемый теоремой Дарбу (см. [6, с. 252, предложение 12]).

1. Перечисление дуг преобразования Донахью

Для формулирования результатов этого раздела нам потребуется понятие *правой огибающей цепи*.

О п р е д е л е н и е 1.1. Правой огибающей цепью называется последовательность триад дерева, полученная по следующим правилам:

- 1) первым элементом этой последовательности становится корневая триада;
- 2) если у последнего добавленного в последовательность элемента есть правый сын, то этот правый сын становится следующим элементом последовательности;
- 3) если у последнего добавленного в последовательность элемента нет правого сына, но есть левый сын, то этот левый сын становится следующим элементом последовательности;
- 4) если у последнего добавленного в последовательность элемента нет ни правого, ни левого сыновей, то формирование правой огибающей цепи завершается.

Под левым и правым поддеревом исходного дерева будем понимать поддерева, присоединённые соответственно слева и справа к корневой триаде. При помощи прямолинейной проверки доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.1.

1. *Дерево $\tau(T)$ имеет пустое правое поддерево тогда и только тогда, когда старшая правая цепь дерева T заканчивается триадой, не имеющей левого сына.*
2. *Дерево $\tau^2(T)$ имеет пустое правое поддерево тогда и только тогда, когда правая огибающая цепь дерева T заканчивается триадой, являющейся левым сыном.*

Каждый цикл преобразования Донахью разбивается деревьями с пустым левым поддеревом на фрагменты. Будем называть эти фрагменты *дугами* преобразования. Естественным образом возникает задача перечисления дуг заданной длины.

О п р е д е л е н и е 1.2. Для дерева T с пустым левым поддеревом назовем *дугой* такую последовательность деревьев $T, \tau(T), \tau^2(T), \dots, \tau^k(T)$, что $\tau^k(T)$ обладает пустым правым поддеревом, и k — минимально возможное. Число k назовем *длиной дуги*.

Дерево с пустым правым поддеревом $\tau^k(T)$ при однократном преобразовании переходит в дерево $\tau^{k+1}(T)$ с пустым левым поддеревом. Дугу дерева $\tau^{k+1}(T)$ назовем второй дугой дерева T . Аналогично определяется третья дуга дерева, четвертая и т. д. В качестве иллюстрации введённого определения на рис. 3 изображено дерево T , длина дуги которого равна трём. Также данный рисунок демонстрирует тот факт, что при преобразованиях Донахью происходит перемещение триад из правого поддерева в левое через корневую триаду.

Рассмотрим деревья, имеющие пустое левое поддерево и состоящие из $n + 1$ триады (одна корневая триада и n некорневых). Обозначим через $T(n, k_1, k_2, \dots, k_s)$ количество таких деревьев, длина первой дуги которых равна k_1 , второй — k_2 и так далее, длина s -ой дуги равна k_s .

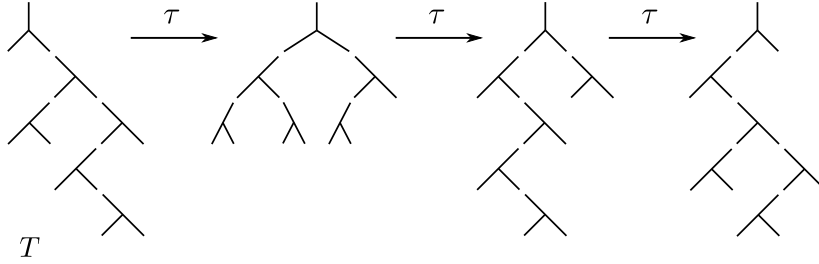


Рис. 3: Дерево с длиной дуги, равной трём

Некоторые утверждения о числах $T(n, k_1, k_2, \dots, k_s)$ содержатся в статье [7]. В частности, там приведено следующее рекуррентное соотношение для чисел $T(n, 1, 1, 1)$. При $n \geq 5$

$$T(n, 1, 1, 1) = \sum_{i=1}^{n-3} i \cdot T(n-i, 1, 1, 1) - \sum_{i=1}^{n-4} i \cdot C_{n-i-3} + C_{n-3},$$

где $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ — число Каталана.

Этот результат можно развить стандартным образом до производящей функции. Производящая функция для чисел $T(n, 1, 1, 1)$ имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(n, 1, 1, 1)x^n = \frac{2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 1} + x^3 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \right).$$

Выражение в скобках является производящей функцией для чисел Каталана, поэтому справедлива следующая асимптотика:

$$T(n, 1, 1, 1) \sim C_{n-3}.$$

Среди множества всех ПКДVK можно выделить подмножество деревьев, замкнутое относительно преобразования Донахью, — семейство примитивных деревьев. Дадим понятие примитивного дерева в терминах разбиения дерева на триады.

О п р е д е л е н и е 1.3. Дерево называется *примитивным*, если оно не содержит триад α , удовлетворяющих одному из следующих двух условий:

- 1) отец триады α является левым, а её единственный сын — правым;
- 2) отец триады α является правым, а её единственный сын — левым.

Так, например, деревья на рис. 3 являются примитивными. А деревья с рис. 2 примитивными не являются: триады, нарисованные на этом рисунке утолщёнными линиями, удовлетворяют условиям из приведённого выше определения.

В работе [8] показано, что количество примитивных деревьев из n триад ($n \geq 2$) равно $m_{n-2} + m_{n-1}$, где $m_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$ — число Моцкина. Количество примитивных

деревьев из n триад, обладающих пустым правым поддеревом, равно m_{n-2} . Производящая функция для чисел Моцкина (см., например, [9]) имеет следующий вид:

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2}.$$

Перейдём к анализу дуг примитивных деревьев. Пусть количество триад в деревьях равно $n + 1$, левые поддеревья пусты. Обозначим через $\hat{T}(n, k_1, k_2, \dots, k_s)$ количество таких деревьев, которые являются примитивными, и длина первой дуги которых равна k_1 , второй — k_2 , и так далее, длина s -й дуги равна k_s .

Начнём с рассмотрения случая $s = 1$. Пусть дерево имеет вид, изображённый на рис. 4 слева, где поддерево M (обведённое пунктиром) содержит k триад.

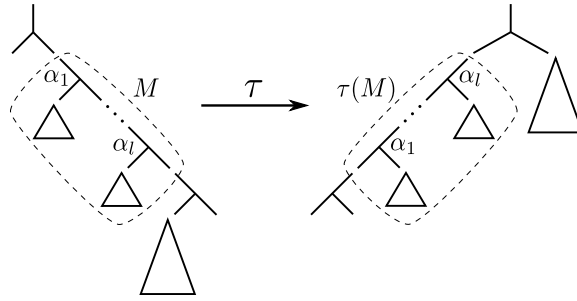


Рис. 4: Перемещение триад через корень примитивного дерева

На этом рисунке проиллюстрирован процесс перемещения $k+1$ триады через корень дерева; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ — триады старшей правой цепи дерева M . Введём обозначение: A_i — дерево, имеющее корневую триаду α_i и пустое правое поддерево ($i = \overline{1, l}$). Для того чтобы исходное дерево было примитивным, должны выполняться два условия:

- 1) триады α_i имеют левых сыновей при любом $i = \overline{1, l}$;
- 2) деревья A_i являются примитивными при любом $i = \overline{1, l}$.

Обозначим символом r_k количество способов сформировать дерево M из k триад. Оно равно

$$r_k = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_l=k} m_{i_1-2} \cdot m_{i_2-2} \cdot \dots \cdot m_{i_l-2},$$

где сумма берётся по всем упорядоченным разложениям k на слагаемые больше единицы.

Будем считать, что $r_0 = 1$, так как дерево M может быть пустым. Если дерево M состоит из одной триады, то исходное дерево не является примитивным, поэтому $r_1 = 0$.

Рассмотрим производящую функцию $R(x)$ для чисел r_k :

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = 1 + m_0 x^2 + m_1 x^3 + (m_0 m_0 + m_2) x^4 + \dots = \\ &= 1 + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n + x^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n \right)^2 + \dots = 1 + x^2 M(x) + \\ &+ x^4 M^2(x) + \dots = \frac{1}{1 - x^2 M(x)} = \frac{1 + x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x(1 + x)}. \end{aligned}$$

Эта производящая функция совпадает с производящей функцией для чисел Риордана. В работе [10] приведены различные интерпретации последовательности чисел r_k , а также получена формула

$$r_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} C_i.$$

Каждой дуге дерева соответствует композиция $n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$, где i_1 триад перемещены через корень за первое преобразование, i_2 — за второе и так далее, i_k триад — за k -е преобразование. Таким образом,

$$\widehat{T}(n, k) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} r_{i_1-1} \cdot r_{i_2-1} \cdot \dots \cdot r_{i_k-1}, \quad (1.1)$$

где суммирование происходит по всем упорядоченным разложениям числа n на k слагаемых.

Используя данное соотношение, можно получить производящую функцию для чисел $\widehat{T}(n, k)$.

Утверждение 1.1.

1. $\sum_{n=k}^{\infty} \widehat{T}(n, k) x^n = x^k R^k(x)$;
2. $\widehat{T}(n, k) \sim \frac{k 3^{n+\frac{1}{2}}}{2^{k+2} \sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}$.

До к а з а т е л ь с т в о. Справедливость первого пункта напрямую следует из формулы (1.1). Перепишем производящую функцию в виде

$$\sum_{n=k}^{\infty} \widehat{T}(n, k) x^n = (x \cdot R(x))^k = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \sqrt{1 - \frac{x}{1/3}} \right)^k.$$

Для вычисления асимптотик коэффициентов производящих функций такого вида уместно использовать результат М. Дрмота, полученный в [11, теоремы 3 и 4]. В нашем случае $g(x) = \frac{1}{2}$, $h(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $x_0 = \frac{1}{3}$. □

Заметим, что при $k = 2$ получаем функцию $x^2 R^2(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2(1+x)}$. Эта функция совпадает с производящей функцией для 321-избегающих простых перестановок (см. [12]).

Ещё несколько свойств чисел $\widehat{T}(n, k)$ напрямую следуют из соотношения (1.1) и из того, что $r_0 = 1$, $r_1 = 0$ и $r_2 = r_3 = 1$.

Утверждение 1.2.

1. $\widehat{T}(n, n-1) = 0$ при $n \geq 2$;
2. $\widehat{T}(n, n-2) = n-2$ при $n \geq 3$;
3. $\widehat{T}(n, n-3) = n-3$ при $n \geq 4$.

Перейдем к перечислению примитивных деревьев, у которых заданы длины нескольких дуг. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.3.

1. $\widehat{T}(n, 1, 1) = \widehat{T}(n-1, 3)$ при $n \geq 2$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{T}(n, 1, 1)x^n = \frac{x(3+3x-\sqrt{1-2x-3x^2})}{2(1+x)^2}$;
3. $\widehat{T}(n, 1, 1) \sim \frac{3^{n+\frac{1}{2}}}{32\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$.

Доказательство. 1. Пусть длина первых двух дуг дерева T равна одному. Тогда преобразование Донахью дерева T должно выглядеть так, как показано на рис. 5. Здесь α — конечная триада правой огибающей цепи дерева $\tau(\tilde{T})$, по лемме 1.1 эта триада должна быть левым сыном.

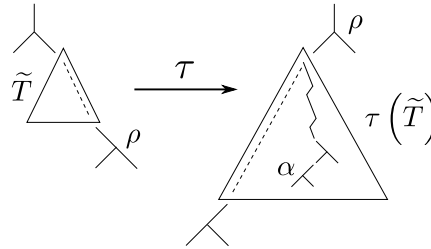


Рис. 5: Иллюстрация к доказательству утверждения 1.3

Заметим, что если убрать триаду ρ из дерева T , то оставшееся дерево будет примитивным, и длина его дуги будет равна трём. Обратное: любое примитивное дерево, длина первых двух дуг которого равна одному, может быть получено из примитивного дерева с длиной дуги, равной трём, путём присоединения триады к старшей правой цепи. Таким образом, построенное соответствие является взаимнооднозначным.

З а м е ч а н и е 1.1. Аналогичные рассуждения для непримитивных деревьев не проходят.

2. Из предыдущего пункта следует, что производящая функция для чисел $T(n, 1, 1)$ выражается через производящую функцию для чисел $T(n, 3)$. Так как $\widehat{T}(1, 1, 1) = 1$, то получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{T}(n, 1, 1)x^n = x + x \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{T}(n, 3)x^n = x + x^4 R^3(x),$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

3. Данная асимптотика получается прямым применением теоремы Дарбу к производящей функции из предыдущего пункта. \square

Следствие 1.1. При $n \geq 1$ верно, что $\widehat{T}(n, 1) = \widehat{T}(n, 1, 1) + \widehat{T}(n + 1, 1, 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство справедливо, потому что производящая функция для последовательности $\widehat{T}(n, 1, 1) + \widehat{T}(n + 1, 1, 1)$ совпадает с производящей функцией для последовательности $\widehat{T}(n, 1)$. \square

Для доказательства ещё одного соотношения нам потребуется вспомогательное утверждение. Пусть φ_i — i -й член последовательности Фибоначчи ($\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_{i+2} = \varphi_{i+1} + \varphi_i$). Также будем считать, что слагаемое два в композиции числа может быть разных типов: 2 и 2'.

Лемма 1.2. Количество представлений числа n в виде упорядоченной суммы $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$, где $n_j \in \{2, 2', 3\}$, равно $\varphi_n + (-1)^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a_n — количество описанных в формулировке леммы композиций числа n , $a_0 = 1$. Рассмотрим производящую функцию $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Так как возможны три типа слагаемых: 2, 2' и 3, то производящая функция равна

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2 + x^2 + x^3)^k = \frac{1}{1 - 2x^2 - x^3}.$$

Заметим, что полученное выражение равно сумме $\frac{x}{1-x-x^2} + \frac{1}{1+x}$, где первое слагаемое является производящей функцией для чисел Фибоначчи, а второе — производящей функцией для последовательности $(-1)^n$. \square

При помощи непосредственной проверки можно убедиться в том, что $\widehat{T}(1, 1, 1) = 1$, $\widehat{T}(2, 1, 1) = 0$, $\widehat{T}(3, 1, 1) = 0$. При больших n справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.4. $\widehat{T}(n, 1, 1) = \widehat{T}(n, 1, 1, 1) + \widehat{T}(n + 1, 1, 1, 1) - \varphi_{n-3} + (-1)^n$ при $n \geq 4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся изложением основных идей доказательства. Пусть у примитивного дерева T длина первых двух дуг равна одному. С одной стороны, количество таких деревьев равно $\widehat{T}(n, 1, 1)$. С другой стороны, возможны два случая:

- 1) длина третьей дуги T тоже равна одному;

2) длина третьей дуги T больше одного.

Первому условию удовлетворяют $\widehat{T}(n, 1, 1, 1)$ деревьев. Предположим, что дерево T удовлетворяет второму условию. По лемме 1.1 старшая правая цепь дерева $\tau^4(T)$ заканчивается триадой, имеющей левого сына. Добавим к этой триаде ещё и правого сына. Обозначим полученное примитивное дерево с $n + 1$ некорневой триадой через $\tau^4(T')$. Можно показать, что в этом случае у дерева T' длины трёх первых дуг равны одному.

С другой стороны, возьмём примитивное дерево T' с $n + 1$ некорневой триадой, у которого длины первых трёх дуг равны одному. Обозначим дерево, получающееся удалением конечной триады старшей правой цепи дерева $\tau^4(T')$ через $\tau^4(T'')$. Если бы тогда дерево T'' всегда удовлетворяло приведённому выше второму условию, то было бы верно равенство $\widehat{T}(n, 1, 1) = \widehat{T}(n, 1, 1, 1) + \widehat{T}(n + 1, 1, 1, 1)$. Но это не так. «Препятствием» являются те деревья T'' , для которых дерево $\tau^2(T'')$ выглядит так, как показано на рис. 6.

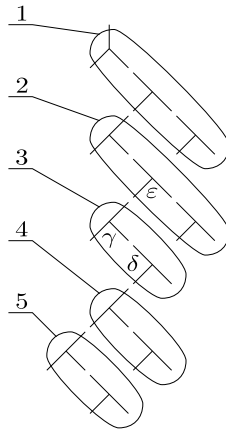


Рис. 6: Иллюстрация к доказательству утверждения 1.4

Назовём такое дерево $\tau^2(T'')$ *плохим*. Плохое дерево обладает тем свойством, что все его правые цепи имеют длину 2 или 3. Причём, если пронумеровать эти цепи так, как показано на рисунке, то первая правая цепь обязательно содержит три триады, а последняя – две.

Представим, что мы формируем плохое дерево, присоединяя цепи в обратном порядке: к последней цепи присоединяем предпоследнюю и т. д. Можно увидеть, что цепь, состоящая из двух триад, может быть присоединена двумя способами к предыдущей добавленной цепи, а цепь из трёх триад – только одним. Например, на рис. 6 цепь №3 могла бы быть присоединена к цепи №4 через триады γ или δ , а цепь №2 к цепи №3 может быть присоединена только через триаду ε . Иначе будет нарушено условие примитивности дерева.

Если из плохого дерева с $n + 1$ некорневыми триадами убрать первую и последнюю цепи (которые формируются однозначно), то останется $n - 3$ триады. Таким образом, количество плохих деревьев с n некорневыми триадами равно числу упорядоченных

разложений числа $n-3$ в сумму двоек и троек, в которой слагаемое 2 бывает двух типов. По лемме 1.2 это число равно $\varphi_{n-3} + (-1)^{n-3}$. Получаем доказываемую формулу. \square

Применяя стандартную технику к доказанному соотношению, можно получить производящую функцию для чисел $\widehat{T}(n, 1, 1, 1)$. Кроме того, теорема Дарбу позволяет вывести асимптотику для этих чисел.

Утверждение 1.5.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{T}(n, 1, 1, 1)x^n = \frac{x(2+7x+5x^2+2x^3+2x^4-x\sqrt{1-2x-3x^2})}{2(1+x)^3} + \frac{x^5}{(1-x-x^2)(1+x)}$;
2. $\widehat{T}(n, 1, 1, 1) \sim \frac{3^{n+\frac{1}{2}}}{128\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}$.

2. Производящие функции для количества вершин в графах поворотов

Рассмотрим граф G_n , вершинами которого являются ПДВК с n некорневыми вершинами, а рёбрами – ПКДВК с n листьями. Скажем, что ориентированное ребро e идёт от вершины v_1 к v_2 , если образ дерева e при левой биекции $l(e)$ равен v_1 , и образ при правой биекции $r(e)$ равен v_2 .

Назовём полученный граф G_n *графом преобразования Донахью*. Компоненты связности этого графа – циклы, соответствующие орбитам преобразования Донахью. Исследование циклической структуры графа G_n – сложная задача. Для того чтобы приблизиться к её решению, рассмотрим граф, вершинами которого являются не произвольные деревья, а деревья фиксированной высоты.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Шаблон* k -го уровня ПДВК с n некорневыми вершинами назовём некубическое дерево, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) высота дерева, т. е. наибольшая длина пути от корня к листу, равна $k + 1$;
- 2) листья дерева, находящиеся на нижнем ярусе, помечены натуральными числами;
- 3) сумма меток и количества непомеченных некорневых вершин равна n .

Договоримся, что шаблон k -го уровня, все метки которого равны одному, является одновременно шаблоном l -го уровня для любого $l > k$. На рис. 7 слева приведён пример шаблона второго уровня для дерева с 14 некорневыми вершинами.

Пусть v – шаблон k -го уровня. Скажем, что висячий корень v находится на нулевом ярусе, сын корня – на первом ярусе, сыновья сына корня – на втором ярусе и т. д.

О п р е д е л е н и е 2.2. Поддережья шаблона v , корнями которых являются вершины $(s + 1)$ -го яруса ($0 \leq s \leq k$), назовём *компонентами s -го уровня* в шаблоне v . *Длиной компоненты* назовём количество сыновей у корневой вершины соответствующей компоненты.

Например, на рис. 7 слева шаблон содержит три компоненты первого уровня, которые имеют следующие длины: 3, 0, 1. Нумеровать компоненты первого уровня будем слева направо.

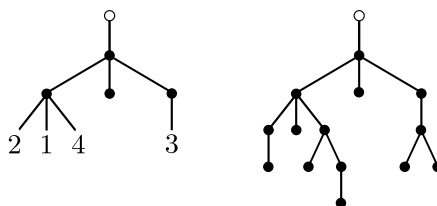


Рис. 7: Шаблон дерева

Хорошо известна биекция между некубическими деревьями и расстановками скобок, при которой листьям деревьев, расположенным на нижнем ярусе, соответствуют внутренние пары скобок максимальной вложенности. Написав между такими скобками метки соответствующих листьев, получим биективный образ шаблона дерева. Будем называть полученную расстановку скобок *модифицированной*. Например, шаблон, изображенный на рис. 7, отображается при данной биекции в модифицированную расстановку скобок $((2)(1)(4))((3))$. Такие расстановки понадобятся нам в дальнейшем для более компактного изображения графа поворотов.

О п р е д е л е н и е 2.3. Дерево T *соответствует* шаблону P , если T получается из P путём добавления на позиции листьев нижнего яруса поддеревьев, количество вершин в которых равно меткам этих листьев.

В качестве иллюстрации на рис. 7 изображены шаблон и соответствующее ему некубическое дерево.

О п р е д е л е н и е 2.4. Некубические деревья T_1 и T_2 называются *эквивалентными на уровне m* , если они соответствуют одному шаблону уровня m .

Для обозначения эквивалентности двух деревьев будем применять запись $T_1 \stackrel{m}{\sim} T_2$.

Проведём факторизацию графа преобразования Донахью по данной эквивалентности, т. е. «склеим» вершины, обладающие одним шаблоном.

О п р е д е л е н и е 2.5. *Графом поворотов m -го уровня* для деревьев с n некорневыми вершинами назовём ориентированный граф, вершинами которого являются шаблоны m -го уровня для деревьев с n некорневыми вершинами, а рёбрам соответствуют кубические деревья. Ребро e идёт от вершины v_1 к v_2 , если образ дерева e при левой биекции $l(e)$ соответствует шаблону v_1 , а образ этого дерева при правой биекции $r(e)$ — шаблону v_2 .

Для графа поворотов будем применять обозначения $G_n^m = G_n / \stackrel{m}{\sim}$. Заметим, что в этом графе допускаются кратные рёбра.

Как было отмечено выше, существует биекция между шаблонами деревьев и модифицированными расстановками скобок. Поэтому, для более компактной записи, будем маркировать вершины графа G_n^m расстановками скобок. Графы поворотов первого и второго уровня для деревьев с пятью некорневыми вершинами приведены на рис. 8.

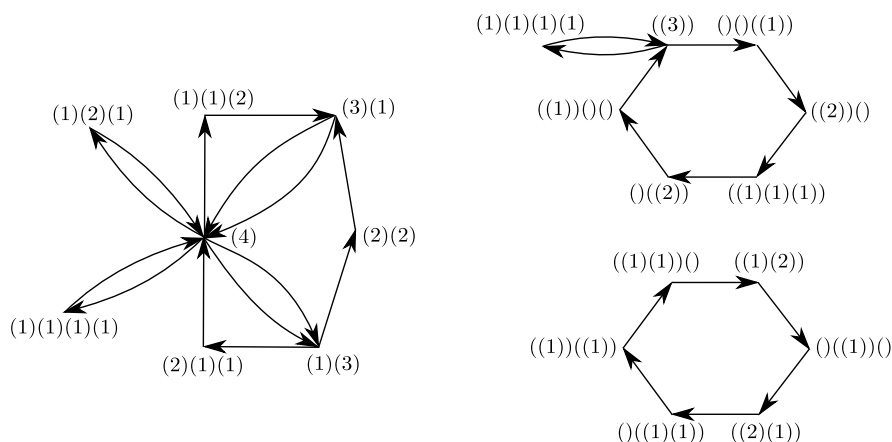


Рис. 8: Графы G_5^1 и G_5^2

Заметим, что количество рёбер в графах поворотов G_n^m равно количеству ПКДВК с n листьями, т. е. равно числу Каталана C_{n-1} . Обозначим символом v_n^m количество вершин в G_n^m .

Задачу вычисления чисел v_n^m можно свести к равносильной задаче нахождения количества деревьев, не содержащих паттерны-гребёнки. Перечислением таких деревьев занимались авторы работы [13]. Продемонстрируем равносильность этих задач.

В соответствии с [13] введём следующие определения. *Паттерном* назовём плоское кубическое дерево без висячего корня (корень имеет двух сыновей). Скажем, что ПКДВК T непрерывно содержит паттерн t , если дерево T содержит t как поддерево. Рис. 9 иллюстрирует данное определение: дерево T непрерывно содержит паттерн t , но не содержит непрерывно паттерн s .

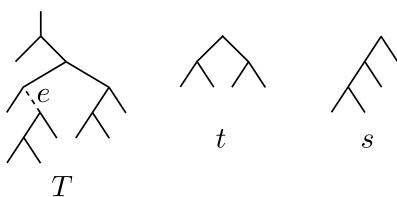


Рис. 9: Паттерны в деревьях

Говорят, что дерево T разрывно содержит паттерн t , если существует дерево T^* , получаемое из T путём применения конечного числа операций стягивания рёбер, такое что T^* непрерывно содержит паттерн t . Так, на рисунке 9 дерево T разрывно содержит паттерн s , так как дерево, получаемое из T стягиванием ребра e (обозначено пунктиром), содержит s непрерывно.

Обозначим через $av_t(n)$ количество ПКДВК с n листьями, которые не содержат разрывно паттерн t . Будем рассматривать специальный вид паттернов — *гребёнки*. Примеры левых гребёнок приведены на рис. 10. Деревья, симметричные левым гребёнкам назовём правыми гребёнками. Обозначим левые гребёнки с i листьями через c_i .

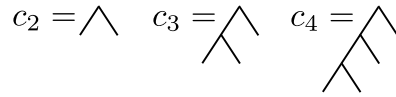


Рис. 10: Паттерны-гребёнки

Утверждение 2.1. $av_{c_{m+3}}(n) = v_n^m$ при $m \geq 1$, $n \geq 1$.

Доказательство. Будем строить биекцию между множеством вершин графа поворотов G_n^m и множеством деревьев, не содержащих разрывно паттерн c_{m+3} индукцией по m .

База индукции. Положим T — дерево с n листьями, не содержащее разрывно паттерн c_4 . Пусть это дерево имеет вид, изображенный на рис. 11 слева. Заметим, что деревья T_1, T_2, \dots, T_s в этом случае либо состоят из одной вершины, либо являются правыми гребёнками. Пример дерева, удовлетворяющего этому условию, изображен на рис. 11 справа. Иначе, если к старшей правой цепи дерева T присоединено дерево, отличное от правой гребёнки, то стягиванием рёбер можно получить поддерево c_4 . Если, например, на рис. 11 к листу x присоединить любое непустое кубическое дерево, то при стягивании рёбер e_1 и e_2 получается дерево, содержащее c_4 .

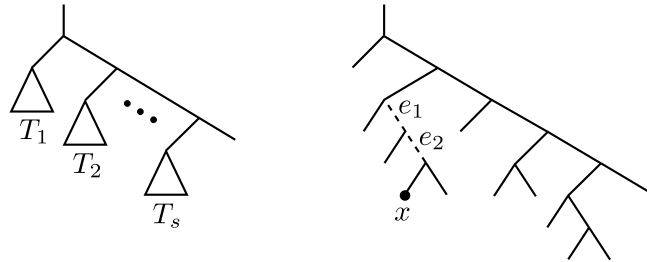


Рис. 11: Иллюстрация к доказательству утверждения 2.1

Дереву T поставим в соответствие вершину $(a_1)(a_2)\dots(a_s)$ графа G_n^1 , где a_i — количество листьев в гребёнке T_i . Понятно, что разным деревьям, не содержащим разрывно c_4 , соответствуют разные вершины в G_n^1 ; для любой вершины в G_n^1 можно построить её прообраз при данном отображении. Поэтому построенное отображение является взаимно-однозначным и $av_{c_4}(n) = v_n^1$.

Индукционный переход. Пусть доказано, что $av_{c_{k+3}} = v_n^k$. Рассмотрим дерево T , не содержащее разрывно паттерн c_{k+4} . Пусть это дерево имеет вид, изображенный на рис. 11 слева. Тогда ни одно из деревьев T_i не содержит разрывно паттерн c_{k+3} , иначе стягиванием рёбер получим паттерн c_{k+4} в дереве T . Пусть P_i — вершина-шаблон в графе G_n^k , соответствующая дереву T_i ($i = \overline{1, s}$). Тогда образом дерева T назовём шаблон $(P_1)(P_2)\dots(P_s)$. Хорошо видно, что построенное отображение является биекцией. \square

Заметим, что при $n \geq 2$ и $m \geq 2$ количество вершин в графе G_n^m может быть записано при помощи следующего рекуррентного соотношения:

$$v_n^m = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n-1} v_{i_1}^{m-1} \cdot v_{i_2}^{m-1} \cdot \dots \cdot v_{i_k}^{m-1}. \quad (2.1)$$

Здесь внутреннее суммирование происходит по всем упорядоченным разложениям числа $n - 1$. Справедливость данной формулы иллюстрирует представление некубического дерева на рис. 12. Если исходное дерево T содержит n некорневых вершин, то деревья T_1, T_2, \dots, T_k (без висячего корня) содержат суммарно $n - 1$ вершину, так как сын корня дерева T не входит ни в одно из этих деревьев.

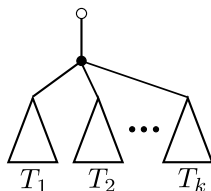


Рис. 12: Некубическое дерево

Для производящей функции последовательности чисел v_n^m будем использовать обозначение $F_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^m x^n$. Следующее утверждение представляет собой рекуррентную формулу для вычисления функций $F_m(x)$.

Утверждение 2.2.

1. $F_1(x) = \frac{x - x^2}{1 - 2x}$;
2. $F_m(x) = \frac{x}{1 - F_{m-1}(x)}$ при $m \geq 2$.

Доказательство. Вершины в графе поворотов первого уровня G_n^1 суть упорядоченные разложения числа $n - 1$ на слагаемые, поэтому верно, что

$$v_n^1 = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 2^{n-2}, & n > 1, \end{cases}$$

откуда следует первый пункт утверждения.

Используя формулу (2.1), при $m \geq 2$ получаем

$$\begin{aligned} F_m(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n-1} v_{i_1}^{m-1} \cdot v_{i_2}^{m-1} \cdot \dots \cdot v_{i_k}^{m-1} \right) x^n = \\ &= x + x \cdot F_{m-1}(x) + x \cdot F_{m-1}^2(x) + x \cdot F_{m-1}^3(x) + \dots = \frac{x}{1 - F_{m-1}(x)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

При помощи доказанного утверждения можно получить явное выражение для функций $F_m(x)$. В работе [13] показано, что верна формула

$$F_m(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} (-1)^i \cdot \binom{m-i+1}{i} \cdot x^{i+1}}{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} (-1)^i \cdot \binom{m-i+2}{i} \cdot x^i}.$$

Хорошо известно, что производящую функцию для чисел Каталана можно представить в виде цепной дроби. Выпишем это разложение для производящей функции, домноженной на x :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n = \frac{x}{1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{\ddots}}},$$

Заметим, что

$$F_1(x) = \frac{x}{1 - \frac{x}{1-x}}, \quad F_2(x) = \frac{x}{1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{1-x}}}, \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, получена следующая комбинаторная интерпретация подходящих дробей для производящей функции последовательности Каталана.

Утверждение 2.3. *Подходящие дроби для производящей функции $\sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$ равны производящим функциям $F_m(x)$ для количества вершин в графах поворотов.*

Этот результат хорошо согласуется с тем фактом, что при фиксированном количестве некорневых вершин n начиная с некоторого уровня m вершинами графа G_n^m являются вообще все некубические деревья заданного размера.

Отметим, что функция $F_2(x)$ совпадает с производящей функцией для чисел Фибоначчи с нечётными номерами, т. е.

$$v_n^2 = \frac{\tau^{2n-3} + \tau^{3-2n}}{\sqrt{5}},$$

где τ — золотое сечение, равное $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

В работе [14] была получена асимптотика для последовательностей v_n^m :

$$v_n^m \sim C \cdot 4^n \cos^{2n} \frac{\pi}{m+3},$$

где C — некоторая положительная константа.

3. Производящие функции для количества вершин в примитивных графах поворотов

Образ примитивного дерева при преобразовании Донахью также является примитивным. Для изучения внутренней структуры графов поворотов целесообразно рассмотреть их подграфы, соответствующие примитивным деревьям.

О п р е д е л е н и е 3.1. Примитивным графом поворотов m -го уровня для деревьев с n листьями называется подграф графа G_n^m , ребра которого соответствуют примитивным деревьям.

Для примитивного графа поворотов будем применять обозначение \widehat{G}_n^m , для количества вершин в нём — \widehat{v}_n^m , для производящей функции числа вершин — $\widehat{F}_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{v}_n^m x^n$. Заметим, что количество рёбер в графе G_n^m равно числу примитивных деревьев, т. е. $m_{n-2} + m_{n-3}$ ($n \geq 3$).

Утверждение 3.1. $\widehat{F}_1(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ (т. е. \widehat{v}_n^1 равно числу Фибоначчи φ_n).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В графе \widehat{G}_n^1 вершины суть упорядоченные разложения числа $n-1$ на слагаемые, в которых единицы могут стоять только в начале или в конце. Запишем в ряд $n-1$ единицу. Поставив в образовавшиеся $n-2$ промежутков знаки «+» и «,», получим композицию числа $n-1$ (элементы композиции отделены запятыми). Если запретить написание двух запятых подряд (в соседних промежутках), то получатся нужные композиции.

То есть количество вершин в \widehat{G}_n^1 равно количеству последовательностей длины $n-2$ из символов «+» и «,», где две запятые не идут подряд. Как известно, количество таких последовательностей равно числу Фибоначчи. \square

Используя формулу Бине, получаем асимптотическую оценку для чисел \widehat{v}_n^1 .

Следствие 3.1. $\widehat{v}_n^1 \sim \frac{\tau^n}{\sqrt{5}}$, где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Найти производящую функцию для чисел \widehat{v}_n^m при $m \geq 2$ позволяет следующее утверждение.

Утверждение 3.2. При $m \geq 2$ верно, что

$$\widehat{F}_m(x) = \frac{x(1+x+x\widehat{H}_{m-1}(x))}{1+x-\widehat{H}_{m-1}(x)},$$

где

$$\widehat{H}_l(x) = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i x^i \widehat{F}_{l-i}(x) + \frac{(-1)^l x^{l+1} + x^2}{1+x} + \frac{(-1)^l x^{l+2}}{1-x}.$$

Доказательство. Пусть шаблон m -го уровня, соответствующий вершине в примитивном графе поворотов, имеет вид, изображённый на рис. 12 (напомним, что у деревьев T_1, T_2, \dots, T_k нет висячего корня). Вследствие примитивности деревьев-рёбер выполняются следующие условия:

- 1) только деревья T_1 и T_k могут содержать по одной вершине;
- 2) у корней деревьев T_i ($i = \overline{1, k}$) больше одного сына (у корней T_1 и T_k может не быть сыновей).

Из второго условия следует, что для дальнейших расчётов требуется рассмотрение вершин-шаблонов в графе \widehat{G}_n^m , сын висячего корня которых обладает более чем одним сыном. Пусть \widehat{w}_n^m — количество таких вершин. Определим $\widehat{w}_1^m = \widehat{w}_2^m = 1$. Действительно, если деревья T_i содержат по одной или по две вершины, то приведённые выше условия не нарушаются (по одной вершине может быть только в деревьях T_1 и T_k).

Поскольку только у одного шаблона первого уровня ($n-1$) сын корня имеет одного сына, то

$$\widehat{w}_n^1 = \begin{cases} \widehat{v}_n^1 - 1, & n \geq 3, \\ \widehat{v}_n^1, & n < 3. \end{cases}$$

Количество вершин графа \widehat{G}_n^2 , сын корня которых имеет одного сына, равно количеству вершин графа \widehat{G}_{n-1}^1 , сын корня которых имеет двух и более сыновей (иначе нарушается примитивность). Поэтому

$$\widehat{w}_n^2 = \begin{cases} \widehat{v}_n^2 - \widehat{v}_{n-1}^1 + 1, & n \geq 4, \\ \widehat{v}_n^2 - \widehat{v}_{n-1}^1, & n = 3, \\ \widehat{v}_n^2, & n < 3. \end{cases}$$

В общем случае по индукции

$$\widehat{w}_n^m = \begin{cases} \widehat{v}_n^m + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \widehat{v}_{n-i}^{m-i} + (-1)^m, & n \geq m+2, \\ \widehat{v}_n^m + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \widehat{v}_{n-i}^{m-i}, & 3 \leq n < m+2, \\ \widehat{v}_n^m, & n < 3. \end{cases}$$

Производящая функция для последовательности $\{\widehat{w}_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{H}_m(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{w}_n^m x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{v}_n^m x^n - x \sum_{n=2}^{\infty} \widehat{v}_n^{m-1} x^n + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \widehat{v}_n^{m-2} x^n - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{m-1} x^{m-1} \sum_{n=2}^{\infty} \widehat{v}_n^1 x^n + (-1)^m \sum_{n=m+2}^{\infty} x^n = \\ &= \widehat{F}_m(x) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i x^i \left(\widehat{F}_{m-i}(x) - x \right) + \frac{(-1)^m x^{m+2}}{1-x} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i x^i \widehat{F}_{m-i}(x) + \frac{(-1)^m x^{m+1} + x^2}{1+x} + \frac{(-1)^m x^{m+2}}{1-x}.$$

Перейдём к вычислению производящей функции для количества вершин в примитивном графе. Верно, что

$$\widehat{F}_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{v}_n^m x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1+\dots+i_k=n-1} \widehat{w}_{i_1}^{m-1} \cdot \dots \cdot \widehat{w}_{i_k}^{m-1} \right) x^n, \quad (3.1)$$

где индексы суммирования i_1, i_2, \dots, i_k принимают значения, при которых только i_1 и i_k могут быть равны единице.

Учитывая это ограничение, получаем:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_m(x) &= x + x\widehat{H}_{m-1}(x) + x\widehat{H}_{m-1}^2(x) + x\left(\widehat{H}_{m-1}^3(x) - x\widehat{H}_{m-1}^2(x)\right) + \\ &+ x\left(\widehat{H}_{m-1}^4(x) - 2x\widehat{H}_{m-1}^3(x) + x^2\widehat{H}_{m-1}^2(x)\right) + \dots + x\left(\widehat{H}_{m-1}^k(x) - \right. \\ &- \binom{k-2}{1}x\widehat{H}_{m-1}^{k-1}(x) + \binom{k-2}{2}x^2\widehat{H}_{m-1}^{k-2}(x) - \binom{k-2}{3}x^3\widehat{H}_{m-1}^{k-3}(x) + \\ &+ \dots + (-1)^k x^{k-2}\widehat{H}_{m-1}^2(x) \left. \right) + \dots \end{aligned}$$

Действительно, если бы суммирование в формуле (3.1) происходило по всем упорядоченным разложениям числа $n - 1$, то производящая функция была бы равна сумме слагаемых $x\widehat{H}_{m-1}^k(x)$. Здесь же из этих слагаемых мы должны вычесть компоненты, которые соответствуют разложениям, содержащим единицы в середине. Так, например, поставить единицу в середине трёхэлементной композиции числа можно единственным способом, поэтому четвёртое слагаемое равно $x\left(\widehat{H}_{m-1}^3(x) - x\widehat{H}_{m-1}^2(x)\right)$. При формировании других слагаемых в этой сумме использовалась формула включений-исключений.

После перегруппировки получаем следующее:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_m(x) &= x + x\left(\widehat{H}_{m-1}(x) + \widehat{H}_{m-1}^2(x) + \widehat{H}_{m-1}^3(x) + \dots\right) - \\ &- x^2\left(\binom{1}{1}\widehat{H}_{m-1}^2(x) + \binom{2}{1}\widehat{H}_{m-1}^3(x) + \binom{3}{1}\widehat{H}_{m-1}^4(x) + \dots\right) + \\ &+ x^3\left(\binom{2}{2}\widehat{H}_{m-1}^2(x) + \binom{3}{2}\widehat{H}_{m-1}^3(x) + \binom{4}{2}\widehat{H}_{m-1}^4(x) + \dots\right) - \dots \end{aligned}$$

Введём обозначения: $y = \widehat{H}_{m-1}(x)$, $S(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$. Тогда получившееся выражение можно переписать следующим образом:

$$\widehat{F}_m(x) = x + x(S(y) - 1) - x^2 y^2 S'(y) + \frac{x^3}{2!} y^2 S''(y) - \frac{x^4}{3!} y^2 S'''(y) + \dots$$

Так как $S(y) = \frac{1}{1-y}$, то $S^{(n)}(y) = \frac{n!}{(1-y)^{n+1}}$. Следовательно,

$$\widehat{F}_m(x) = x + x \frac{y}{1-y} - x^2 \frac{y^2}{(1-y)^2} + x^3 \frac{y^2}{(1-y)^3} - \dots = \frac{x(1+x+xy)}{1+x-y}.$$

□

Список литературы

- [1] R. Donaghey, “Automorphisms on Catalan trees and bracketings”, *Journal of Combinatorial Theory*, **29**:1 (1980), 75–90.
- [2] L. W. Shapiro, “The cycle of six”, *The Fibonacci Quarterly*, **17**:3 (1979), 253–259.
- [3] D. Callan, “A bijection on Dyck paths and its cycle structure”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, **14**:1 (2007), R28.
- [4] A. Karttunen, URL: <http://www.oeis.org/A080070>.
- [5] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Part 1. V. 4A: Combinatorial Algorithms, Addison-Wesley Professional, New Jersey, 2011.
- [6] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, *Combinatorial Species and Tree-Like Structures*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [7] И. А. Пушкарев, В. А. Бызов, “Дуги преобразования Донахью и треугольник Каталана”, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2015, № 1, 19–22.
- [8] R. Donaghey, “Restricted plane tree representations of four Motzkin-Catalan equations”, *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, **22**:2 (1977), 114–121.
- [9] R. Donaghey, L. W. Shapiro, “Motzkin numbers”, *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, **23**:3 (1977), 291–301.
- [10] F. R. Bernhart, “Catalan, Motzkin, and Riordan numbers”, *Discrete Mathematics*, **204**:1–3 (1999), 73–112.
- [11] M. Drmota, “A bivariate asymptotic expansion of coefficients of powers of generating functions”, *European Journal of Combinatorics*, **15**:2 (1994), 139–152.
- [12] M. H. Albert, V. Vatter, “Generating and enumerating 321-avoiding and skew-merged simple permutations”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **20**:2 (2013), P44.
- [13] M. Dairyko, L. Pudwell, S. Tyner, C. Wynn, “Non-contiguous pattern avoidance in binary trees”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **19**:3 (2012), P22.
- [14] Q. Yuan, *The catalan numbers, regular languages, and orthogonal polynomials*, URL: <https://qchu.wordpress.com/2009/06/07/the-catalan-numbers-regular-languages-and-orthogonal-polynomials/>.

References

- [1] R. Donaghey, “Automorphisms on Catalan trees and bracketings”, *Journal of Combinatorial Theory*, **29**:1 (1980), 75–90.
- [2] L. W. Shapiro, “The cycle of six”, *The Fibonacci Quarterly*, **17**:3 (1979), 253–259.
- [3] D. Callan, “A bijection on Dyck paths and its cycle structure”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, **14**:1 (2007), R28.
- [4] A. Karttunen, URL: <http://www.oeis.org/A080070>.

- [5] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Part 1. V. 4A: Combinatorial Algorithms, Addison-Wesley Professional, New Jersey, 2011.
- [6] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, *Combinatorial Species and Tree-Like Structures*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [7] I. A. Pushkarev, V. A. Byzov, “Arcs of Donaghey’s Transformation and Catalan’s Triangle”, *Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2015, № 1, 19–22 (In Russian).
- [8] R. Donaghey, “Restricted plane tree representations of four Motzkin-Catalan equations”, *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, **22**:2 (1977), 114–121.
- [9] R. Donaghey, L. W. Shapiro, “Motzkin numbers”, *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, **23**:3 (1977), 291–301.
- [10] F. R. Bernhart, “Catalan, Motzkin, and Riordan numbers”, *Discrete Mathematics*, **204**:1–3 (1999), 73–112.
- [11] M. Drmota, “A bivariate asymptotic expansion of coefficients of powers of generating functions”, *European Journal of Combinatorics*, **15**:2 (1994), 139–152.
- [12] M. H. Albert, V. Vatter, “Generating and enumerating 321-avoiding and skew-merged simple permutations”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **20**:2 (2013), P44.
- [13] M. Dairyko, L. Pudwell, S. Tyner, C. Wynn, “Non-contiguous pattern avoidance in binary trees”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **19**:3 (2012), P22.
- [14] Q. Yuan, *The catalan numbers, regular languages, and orthogonal polynomials*, URL: <https://qchu.wordpress.com/2009/06/07/the-catalan-numbers-regular-languages-and-orthogonal-polynomials/>.

Информация об авторе

Бызов Виктор Александрович, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики. Вятский государственный университет, г. Киров, Российская Федерация. E-mail: vbyzov@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3613-5949>

Поступила в редакцию 15.01.2019 г.
 Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.
 Принята к публикации 14.03.2019 г.

Information about the author

Viktor A. Byzov, Senior Lecturer of the Applied Mathematics and Informatics Department. Vyatka State University, Kirov, the Russian Federation. E-mail: vbyzov@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3613-5949>

Received 15 January 2019
 Reviewed 11 February 2019
 Accepted for press 14 March 2019